System Engineering and Productivity/ 2024/ Vol.4/ No.1/ 59-69

System Engineering and Productivity

DOI: 10.22034/msb.2024.2029173.1210

Distributional Robust Portfolio Optimization Based on Kalmar Ratio

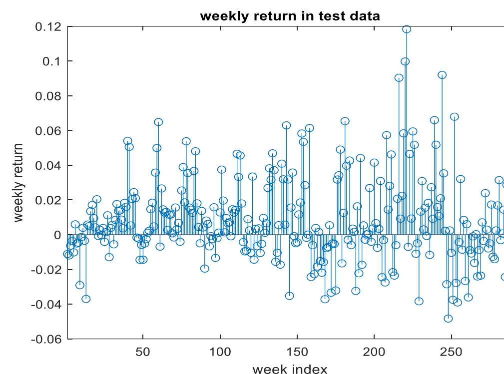
Mona Beyranvand[1], Sayyed Mohammad Reza Davoodi [2*], Mohammadreza Sharifi-Ghazvini [3]

[1] Ph.D. Student, Department of Industrial Management, Dehaghan Branch, Islamic Azad University, Dehaghan, Iran
[2] Associate Professor, Department of Industrial Management, Dehaghan Branch, Islamic Azad University, Dehaghan, Iran
[3] Assistant Professor, Department of Industrial Management, Dehaghan Branch, Islamic Azad University, Dehaghan, Iran

HIGHLIGHTS

- Robust optimization is considered a practical solution for problems in which the amount and distribution of parameters are unknown
- In the current research, the goal is to maximize the distribution-based stock portfolio based on Kalmar's ratio with Wassersten's metric.

GRAPHICAL ABSTRACT



ARTICLE INFO

Article history:
Article Type: Research paper
Received: 15 May 2024
Received in revised form: 6 June 2024
Accepted: 18 June 2024
Available online: 20 June 2024
*Correspondence:
smrdavoodi@ut.ac.ir
How to cite this article:
Beyranvand, M., Davoodi, S.M.R, Sharifi Ghazvini, M. Distributional Robust Portfolio Optimization Based on Kalmar Ratio. *System Engineering and Productivity*. (2024), 4(1), 59-69.

Keywords:
Kalamar ratio
Distributional robust basket
Particle swarm algorithm

ABSTRACT

In today's competitive environment, designing a robust program for stock portfolio selection is important and necessary. The stock portfolio selection problem is one of the most important problems in the field of finance. Robust optimization is a practical solution to problems in which the value and distribution of parameters are unknown. In the present study, the goal is to maximize a distributed robust stock portfolio based on the Kalamar ratio with the Wasserstein metric, which is a reward-risk ratio and its calculation depends on the portfolio return distribution. Reward-risk ratios are of great importance for risk-averse investors by simultaneously considering return and risk. The research strategy for robustness of the return distribution parameter is to consider all returns that are in a neighborhood of the empirical portfolio distribution, which is determined by the Wasserstein metric criterion. The sample portfolio of the present study consists of 8 indices or industries from the Tehran Stock Exchange with the highest trading volume in the period from the beginning of 1389 to the end of 1400 and in a weekly time horizon. The test data is divided into 5 periods and to evaluate the results of the distributional robust portfolio in comparison with the portfolio without this property, the result of dividing the average of the Kalmar ratios in the 5 mentioned periods by their standard deviation was used. The optimization results using the particle swarm optimization algorithm show that the distributional robust portfolio improves the mentioned ratio by 27.1 and in addition, the minimum Kalmar ratio in the 5 periods in the distributional robust portfolio is higher than in the portfolio without this property.

Publisher: University of Eyvanekey

مهندسی سیستم و بهره‌وری/ سال ۱۴۰۳/ دوره ۴/ شماره ۱/ صفحه ۵۹-۶۹

نشریه مهندسی سیستم و بهره‌وری

DOI: 10.22034/msb.2024.2029173.1210

بهینه‌سازی سبد سهام استوار توزیعی بر اساس نسبت کالمار

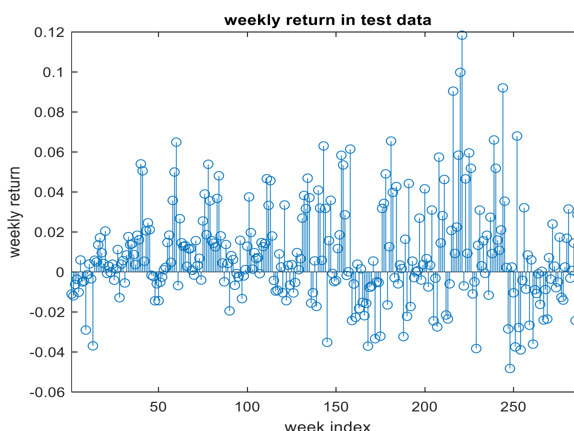
منا بیرانوند[۱]، سید محمد رضا داودی[۲*]، محمدرضا شریفی قزوینی[۳]

[۱] دانشجوی دکتری، گروه مدیریت، واحد دهاقان، دانشگاه آزاد اسلامی، دهاقان، ایران

[۲] دانشیار، گروه مدیریت، واحد دهاقان، دانشگاه آزاد اسلامی،دهاقان، ایران

[۳] استادیار، گروه مهندسی صنایع، واحد دهاقان، دانشگاه آزاد اسلامی، دهاقان، ایران

چکیده گرافیکی



برجسته‌ها

- بهینه‌سازی استوار راه‌حلی عملی برای مسائلی به شمار می‌رود که در آن‌ها مقدار و توزیع پارامترها نامعلوم است.
- در پژوهش حاضر هدف بیشینه‌سازی سبد سهام استوار توزیعی بر اساس نسبت کالمار با متریک واسرشتن است.

چکیده

امروزه در فضای رقابتی موجود، طراحی یک برنامه استوار برای انتخاب سبد سهام، امری مهم و ضروری است. مسئله انتخاب سبد سهام یکی از مهم‌ترین مسائل در حوزه مالی است. بهینه‌سازی استوار راه‌حلی عملی برای مسائلی به شمار می‌رود که در آن‌ها مقدار و توزیع پارامترها نامعلوم است. در پژوهش حاضر هدف بیشینه‌سازی سبد سهام استوار توزیعی بر اساس نسبت کالمار با متریک واسرشتن است که از نسبت‌های پاداش-ریسک است و محاسبه آن به توزیع بازده سبد سهام وابسته است. نسبت‌های پاداش-ریسک با در نظر گرفتن هم‌زمان بازده و ریسک برای سرمایه‌گذاران ریسک‌گریز اهمیت فراوانی دارد. استراتژی پژوهش برای استوارسازی پارامتر توزیع بازده، در نظر گرفتن تمام بازده‌هایی است که در یک همسایگی از توزیع تجربی سبد قرار دارد که برای تعیین چنین توزیع‌هایی از معیار متریک واسرشتن استفاده‌شده است. سبد نمونه‌ای پژوهش حاضر متشکل از ۸ شاخص یا صنعت از بورس اوراق بهادار تهران با بیشترین حجم معاملاتی در بازه زمانی ابتدای ۱۳۸۹ تا انتهای ۱۴۰۰ و در افق زمانی هفتگی است. داده‌های تست به ۵ دوره تقسیم‌شده است و برای ارزیابی نتایج سبد استوار توزیعی در مقایسه با سبد فاقد این خاصیت از حاصل تقسیم میانگین نسبت‌های کالمار در ۵ دوره مذکور به انحراف معیار آن‌ها استفاده‌شده است. نتایج بهینه‌سازی به کمک الگوریتم تجمعی ذرات نشان می‌دهد که سبد استوار توزیعی کالمار نسبت مذکور را به میزان ۱/۲۷ بهبود می‌دهد و بعلاوه کمینه نسبت کالمار در ۵ دوره در سبد استوار توزیعی نسبت به سبد فاقد این خاصیت بیشتر است.

مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۳/۰۲/۲۶

بازنگری: ۱۴۰۳/۰۳/۱۷

پذیرش: ۱۴۰۳/۰۳/۲۹

ارائه برخط: ۱۴۰۳/۰۳/۳۱

*نویسنده مسئول:

smrdavoodi@ut.ac.ir

کلیدواژه‌ها:

نسبت کالمار

سبد استوار توزیعی

الگوریتم تجمعی ذرات

۱- مقدمه

هنگامی‌که سرمایه‌گذار تصمیم می‌گیرد سرمایه خود را بین چند دارایی مالی تقسیم کند، مشکل انتخاب پرتفوی سهام بهینه خود را نشان می‌دهد. سؤال اساسی این است که چگونه می‌توان سرمایه اولیه را بین دارایی‌ها تقسیم کرد تا سرمایه‌گذار بتواند به هدف خود برسد. این هدف اغلب دستیابی به حداقل سطح معینی از بازده یا ثروت در عین تحمل کمترین ریسک ممکن است و مدل سبد سهام مارکویتز (مدل میانگین واریانس) اولین مدلی بود که چنین مشکلی را مدل‌سازی کرد (Zhang, 2022). پس از بسته شدن پرتفوی، تغییرات قیمت دارایی‌های سبد در طول زمان رخ می‌دهد و پرتفوی در پایان افق زمانی سرمایه‌گذاری به بازدهی می‌رسد. این بازده ممکن است با بازدهی که در مرحله نظری به دلیل تغییرات شدید قیمت تعدادی از دارایی‌ها مورد انتظار بود، فاصله زیادی داشته باشد. درواقع اتفاقی که افتاده فاصله زیادی بین پیش‌بینی و واقعیت است و به همین دلیل در انتخاب سبد سهام با نوعی بی‌ثباتی مواجه هستیم. در برنامه‌نویسی ریاضی، مسائل معمولاً با این فرض بهینه‌سازی می‌شوند که پارامترهای مدل معین استند. بااین‌حال، در دنیای واقعی، بیشتر داده‌ها دارای عدم قطعیت استند (Ji et al., 2022). در مسائل دنیای واقعی، ممکن است تعداد زیادی از محدودیت‌ها با تغییر یکی از داده‌ها نقض شوند و راه‌حل به‌دست‌آمده ممکن است کمتر از حد بهینه یا حتی غیرممکن باشد. درنتیجه این بحث، سؤال اصلی ایجاد راه‌حلی برای مسئله است که در برابر این عدم قطعیت داده‌ها مقاوم باشد، به‌اصطلاح، این پاسخ‌ها استوار استند و به این نوع بهینه‌سازی، بهینه‌سازی استوار می‌گویند (Li, 2023).

در کشور ما همواره بازار سرمایه با ریسک‌های زیادی خصوصاً ریسک سیاسی و تغییر قوانین مواجه است که این ریسک‌ها می‌تواند دارایی‌های سبد سرمایه‌گذاران را با تغییرات قیمتی شدید پیش‌بینی‌نشده‌ای مواجه کرده و احیاناً منجر به افت‌های شدیدی در ارزش سبد سهام گردد. بر این اساس، پژوهش حاضر به دنبال پاسخگویی به این سؤال است که بهینه‌سازی سبد سهام استوار توزیعی بر اساس نسبت کالمار دارای چه مفروضاتی است و عملکرد آن در بورس اوراق بهادار تهران چگونه است؟

۲- پیشینه تحقیق

مسئله انتخاب سبد مالی یکی از مهم‌ترین مسائل مالی است که همواره از اهمیت بالایی برخوردار بوده است. هرسال سرمایه‌گذاری‌های بیشتری در صندوق‌های مشارکتی و شرکت‌های سرمایه‌گذاری انجام می‌شود و مدیران سبد مالی همواره به دنبال راه‌حل‌های کاراتر و با ریسک کمتر در این رویه استند. بهینه‌سازی سبد سهام تلاشی است برای یافتن نسبت‌های بهینه از ثروت که باید به سهام و دارایی‌های مختلف اختصاص یابد (khandan, 2024).

پارامترهای مورداستفاده در مدل‌های بهینه‌سازی سبد سهام غالباً بر اساس رفتار آماری دارایی‌های سبد در داده‌های تاریخی برآورد می‌گردد. منظور از رفتار آماری، توزیع بازده دارایی‌های تشکیل‌دهنده سبد سهام است. زمانی که توزیع بازده دارایی‌ها مشخص باشد، پارامترهای اساسی سبد سهام همچون بازده، واریانس، چولگی، کشیدگی، ارزش در معرض ریسک، ریزش مورد انتظار و ... به‌عنوان چندک‌ها یا گشتاورهای توزیع بازده قابل‌محاسبه است (Hosseini-Nodeh et al, 2022).

استوار سازی سبد سهام برای یک یا چند پارامتر بدین معنا است که جواب بهینه به صورتی محاسبه گردد که در صورت انحراف پارامترهای برآورد شده از مقدار مورد انتظار (در یک محدوده انحراف مشخص)، سبد سهام با تغییرات شدید مواجه نشود. رویکرد کلی در استوار سازی بدین‌صورت است که برای پارامتر دارای عدم قطعیت، سناریوهایی در مجموعه ابهام یا عدم قطعیت در نظر گرفته شود و عملکرد سبد سهام در سناریوهای مختلف مورد ارزیابی قرار می‌گیرد (Du et al., 2022). در این حالت، متداول‌ترین رویکرد در استوار سازی، رویکرد بدترین سناریو است که بر اساس آن جواب بهینه به صورتی انتخاب می‌گردد که بیشترین ضرر حاصل‌شده در سناریوهای مختلف، کمینه گردد. در این صورت‌مسئله بهینه‌سازی به فرم یک مدل بیشینه- کمینه ظاهر می‌شود (Ji et al., 2022).

پویایی بازار سهام می‌تواند موجب تغییر در بازده دارایی‌های سبد سهام برای دوره‌های زمانی مختلف شود و مسئله سبد سهام استوار توزیعی با توزیع بازده سبد سهام به‌صورت یک پارامتر دارای عدم قطعیت برخورد می‌کند. در پژوهش حاضر، توزیع بازده سبد سهام (نه تک‌تک دارایی‌ها) از دیدگاه توزیع تجربی موردبررسی قرار می‌گیرد. بدین‌صورت

توزیع سبد سهام می‌تواند از مقدار برآوردی تجربی خود منحرف شود. این انحراف‌ها درواقع همان سناریوهایی استند که در بهینه‌سازی استوار از آن‌ها صحبت شد. برای این منظور نیاز است تا فاصله بین دو توزیع (توزیع تجربی و توزیع دارای انحراف از توزیع تجربی) مورداندازه‌گیری قرار گیرد. برای این منظور پژوهش حاضر از معیار متریک واسرشتین استفاده می‌کند. با اندازه‌گیری فاصله بین دو اندازه احتمال (که یکی از آن‌ها همان توزیع تجربی بازده سبد سهام است)، نااستواری سبد سهام توسط یک شعاع همسایگی حول بازده تجربی کنترل می‌شود. بدین‌صورت استوار سازی با اطمینان بالاتر با شعاع همسایگی بزرگ‌تر حول توزیع تجربی کنترل می‌شود. بدین‌صورت شعاع بزرگ‌تر در بردارنده سناریوهای بیشتر است و تأثیر آن‌ها در بهینه‌سازی سبد سهام در نظر گرفته می‌شود.

تاکنون بیان شد که سبد سهام پژوهش از نوع استوار توزیعی است و در ادامه تابع هدف مدل سبد پژوهش موردبررسی قرار می‌گیرد. ریسک، عدم اطمینان پیرامون ارزش آتی یک دارایی یا سبد ابزارهای مالی تعریف می‌شود. اندازه‌گیری و کنترل ریسک برای بقا و حفظ یک سیستم مالی سالم و کارآمد ضروری است (Kobayashi., 2021). نسبت پژوهش، نسبت کالمار[1] است که در آن میانگین بازده سبد بر حداکثر افت[2] تقسیم می‌شود و بزرگ‌تر بودن نسبت کالمار مطلوب سرمایه‌گذاران است. حداکثر افت بزرگ‌ترین مقدار کاهش در بازده سبد سهام را قبل از یک‌زمان مشخص اندازه‌گیری می‌کند. تابع هدف مدل انتخاب سبد سهام پژوهش حاضر، بیشینه‌سازی نسبت کالمار است که به توزیع بازده سبد سهام وابسته است. به عبارتی تغییر توزیع بازده می‌تواند این نسبت را تغییر دهد و با نااستواری مواجه کند و هدف پژوهش حاضر استوارسازی مدل سبد سهام با در نظر گرفتن نسبت کالمار با رهیافت استوارسازی توزیعی است و ازاین‌رو برای استوارسازی آن باید تغییرات بازده حول توزیع تجربی لحاظ شود. بدین‌صورت مدل سبد سهام پژوهش حاضر از نوع استوار توزیعی با تابع هدف بیشینه‌سازی نسبت کالمار است.

حمیدیه و همکاران (Hamidieh et al., 2023) در پژوهشی تحت عنوان بهینه‌سازی استوار پرتفوی تحت معیار ارزش در معرض ریسک شرطی- فاصله‌ای در بورس تهران پرداختند. یافته‌ها نشان داد که می‌توان ترجیح ذهنی یا تنفر سرمایه‌گذاران از ریسک را با رعایت اصل تنوع‌بخشی در پرتفوی توصیف کرد که به‌نوعی نوآوری متفاوتی از مدل کلاسیک پرتفوی را ارائه می‌دهد. همچنین با بهینه‌سازی استوار، تمام سناریوها با بدترین حالت ممکن در مدل بهینه شد و نتایج نشان داد که هر چه این دامنه کوچک‌تر در نظر گرفته شود، شدت ریسک‌گریزی سرمایه‌گذاران بیشتر نمایان می‌شود.

شیرکوند و فدایی (Shirkavand & Fadaei, 2022) در پژوهشی به بهینه‌سازی سبد سهام استوار با به‌کارگیری مدل‌های چند متغیره و اُمگا- ارزش در معرض ریسک شرطی بر پایه ملاک حداقل حداکثر پشیمانی پرداختند. یافته‌ها حاکی از آن است که در بازه ماهانه، سبدهای سهام بهینه استوار در مقایسه با سبد سهام معیار، نسبت اطلاعاتی بیشتر و خطای ردیابی کمتری دارند.

حیدری و همکاران (Heydari et al., 2021) در پژوهشی به بهینه‌سازی سبد سهام مبتنی بر مدل برنامه‌ریزی امکانی استوار با استفاده از الگوریتم‌های ژنتیک و جهش قورباغه مخلوط شده پرداختند. یافته‌های حاصل از اجرای دو الگوریتم بر روی ۱۵ مسئله مذکور با استفاده از آزمون آماری T مورد مقایسه قرارگرفته است که بیانگر عدم تفاوت معنادار بین دو الگوریتم در انتخاب سبد سرمایه‌گذاری است اما رویکرد ترکیبی تاپسیس و وزن دهی آنتروپی، الگوریتم ژنتیک را به‌عنوان الگوریتم برتر انتخاب می‌کند.

لی (Li, 2023) یک راه‌حل قوی مبتنی بر داده برای بهینه‌سازی رشد پورتفولیو بر اساس بهینه‌سازی سبد کلی- واسرشتن معرفی کردند. یافته‌ها نشان می‌دهد که سبد کلی- واسرشتن می‌تواند در آزمایش‌های خارج از نمونه در چندین معیار عملکرد بهتر از سبدهای کلی عمل کند و ثبات بیشتری از خود نشان دهد.

بِرمین و هُلم (Bermin & Holm, 2022) نشان دادند که معامله‌گران استراتژی کلی به‌طور طبیعی به‌گونه‌ای معامله می‌کنند که تعادلی را برای ماتریس کوواریانس آنی القا کنند. این تعادل که به‌تنهایی از معاملات ناشی می‌شود، این ویژگی را دارد که همبستگی تعادل را می‌توان به‌عنوان نقطه زین یک بازی دیفرانسیل تصادفی توصیف کرد. بااین‌حال، ازآنجایی‌که بازی لزوماً یک بازی با مجموع صفر

[1] Calmar ratio

[2] Maximum drawdown

نیست، نوسانات تعادلی کمتر از آن چیزی است که از بازی پیش‌بینی می‌شود. تعادل کوواریانس به‌طور کامل توسط نرخ بازده لگاریتمی، نرخ بهره و تمایل کل به اهرمی که در بازار مشاهده می‌شود مشخص می‌شود. جی و همکاران (Ji et al., 2022) مسئله بهینه‌سازی استوار توزیعی سبد سهام با نسبت بازده تعدیل‌شده بادم پایدار خطی شده را مطالعه کردند. مسائل پیشنهادی به مسائل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط فرموله شدند و در پایان نتایج اعتبارسنجی با استفاده از روش افق غلتشی، عملکرد برتر خارج از نمونه سبدهای پژوهش را نشان می‌دهد. حسینی نوده و همکاران (Hosseini-Nodeh et al, 2022) به بررسی بهینه‌سازی سبد سهام با فرض توزیع ناشناخته بازده دارایی ازنظر توزیع را با یک محدودیت تسلط تصادفی مبهم پرداختند. یافته‌ها نشان داده‌شده است که بهینه‌سازی سبد سهام مبتنی بر ابهام واسرشتن را می‌توان به یک برنامه نیمه معین و برنامه‌ریزی مخروطی مرتبه دوم کاهش داد. مسائل با استفاده از راه‌حل‌های بهینه برنامه‌های بهینه‌سازی بر اساس تنظیمات مختلف به‌طور عمیق موردبررسی قرار می‌گیرند. ژانگ (Zhang, 2022) با در نظر گرفتن ریسک‌گریزی سرمایه‌گذاران و عدم قطعیت مشخص‌کننده بازده دارایی یک مدل سبد پورتفوی استوار توزیعی را تحت شرایطی ایجاد کردند که توزیع بازده دارایی پرخطر ناشناخته باشد. به‌طور خاص، هدف یافتن یک سبد بهینه از دارایی‌ها است که سطح مطلوبیت بدترین حالت را در اندازه واسرشتن به حداکثر می‌رساند. این مدل همچنین به‌عنوان یک مسئله برنامه‌نویسی اعداد صحیح درجه دوم با محدودیت‌های کاردینالیته (تعداد سهام) فرموله شده است. علاوه بر این، یک الگوریتم ترکیبی برای بهبود کارایی راه‌حل و مناسب‌تر کردن آن برای مسائل در مقیاس بزرگ پیشنهاد شده است. با مطالعه پیشینه تحقیق مشاهده می‌شود که تاکنون در ادبیات تحقیق، سبد سهام استوار توزیعی بر اساس نسبت کالمار مورد طراحی و ارزیابی عملکرد قرار نگرفته است که در پژوهش حاضر به آن پرداخته می‌شود.

۳- روش‌شناسی پژوهش

روش تحقیق در این پژوهش توصیفی - تحلیلی است. این تحقیق بر اساس هدف یک تحقیق کاربردی است. در پژوهش حاضر برای تعیین یک همسایگی حول توزیع تجربی بازده سبد سهام از معیار متریک واسرشتین استفاده می‌شود و مدل استوار توزیعی درنهایت به شکل یک مدل بیشینه-کمینه ظاهر می‌شود و با توجه به فرم غیرخطی آن از الگوریتم فرا ابتکاری تجمعی ذرات برای بهینه‌سازی آن استفاده می‌شود. در بخش عملی یک مدل به کمک یک سبد سهام نمونه‌ای در بورس اوراق بهادار تهران مورد پیاده‌سازی قرار می‌گیرد تا، عملکرد سودآوری آن موردبررسی قرار گیرد. برای سنجش سودآوری از معیار تغییرپذیری نسبت مذکور در داده‌های تست و کمینه آن استفاده می‌شود. برای اعتبارسنجی مدل از مدل بیشینه‌سازی نسبت کالمار بدون خاصیت استوار سازی توزیعی استفاده می‌شود. برای پیاده‌سازی مدل از کد نویسی در نرم‌افزار متلب استفاده‌شده است.

۳-۱- جامعه آماری

سبد نمونه‌ای پژوهش حاضر از ۸ شاخص یا صنعت از بورس اوراق بهادار تهران با بیشترین حجم معاملاتی در بازه زمانی ابتدای ۱۳۸۹ تا انتهای ۱۴۰۰ تشکیل‌شده است.

۳-۲- مدل پژوهش

در این بخش به معرفی مدل سبد سهام جدید استوار توزیعی بر اساس نسبت کالمار با متریک واسرشتن می‌پردازیم. نخست به معرفی فاصله یا متریک واسرشتن پرداخته می‌شود. فاصله واسرشتن یا متریک کانترویچ-رابینشتن[1] یک تابع فاصله است که بین توزیع‌های احتمال در یک فضای متریک معین M تعریف می‌شود. به‌طور شهودی، اگر هر توزیع به‌عنوان یک تپه خاکی انباشته‌شده در M در نظر گرفته شود، متریک واسرشتن، حداقل هزینه تبدیل یک تپه به دیگری است که حاصل‌ضرب مسافتی که باید جابجا شود در تفاوت بین میانگین‌های دو توزیع است. درصورتی‌که (M, d) یک فضای متریک باشد و $p \geq 1$ $P_p(M)$, فضای تمام اندازه‌هایی مانند μ تعریف می‌شود که P-اُمین گشتاور آن‌ها متناهی است یعنی نقطه x_0 موجود است که

$$\int_M d\,(x, x_.)^p d\mu(x) < \infty. \qquad (۱)$$

[1] Kantorovich-Rubinstein

درصورتی‌که $\mu,\nu \in P_p(M)$, p-اُمین فاصله واسرشتن بین μ,ν به‌صورت

$$W_p(\mu,\nu): = \left(\inf_{\gamma\in\Gamma(\mu,\nu)} \int_{M\times M} d\,(x,y)^p d\gamma(x,y)\right)^{\frac{1}{p}} \quad (۲)$$

تعریف می‌شود که $\Gamma(\mu,\nu)$ فضای تمام اندازه‌هایی روی $M\times M$ است که توابع اندازه حاشیه‌ای آن‌ها برابر μ,ν است. تحت این شرایط می‌توان نشان داد که

$$W_p(\mu,\nu) = (\inf \boldsymbol{E}\,[d(X,Y)^p])^{1/p} \quad (۳)$$

به‌عنوان نمونه برای دو اندازه اتمی $\mu_1 = \delta_{a_1}$ و $\mu_2 = \delta_{a_2}$ در اعداد حقیقی، فاصله واسرشتن برابر $W_p(\mu_1,\mu_2) = |a_1 - a_2|$ است. همچنین برای دو توزیع نرمال $\mu_1 = \mathcal{N}(m_1,C_1)$ و $\mu_2 = \mathcal{N}(m_2,C_2)$ که $C_1,C_2 \in R^{n\times n}$ فاصله واسرشتن عبارت است از:

$$W_2(\mu_1,\mu_2)^2 = \|m_1 - m_2\|_2^2 + \mathrm{trace}(C_1 + C_2 - 2(C_2^{\frac{1}{2}} C_1 C_2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \quad (۴)$$

که در حالت نرمال یک‌بعدی به‌صورت $W_1(\mu_1,\mu_2)= \int_{\mathbb{R}}|F_1(x) - F_2(x)|\,dx$ است. برای اندازه‌های گسسته و متناهی P,P_0 فاصله واسرشتن به‌صورت رابطه (۵) درمی‌آید. که در آن توزیع P ،مقدار ξ_j را با احتمال p_j و توزیع P_0 مقدار ξ_i^0 را با احتمال p_i^0 کسب می‌کند.

$$W(P,P_0) = \inf_{\pi\geq 0}\Big(\sum_{i,j\in N} \pi_{i,j}\,\|\xi_j - \xi_i^0\| : \sum_{j\in N}\pi_{i,j} = p_i^0, \forall i\in N;\ \sum_{i\in N}\pi_{i,j} = p_j, \forall j \in N\Big) \quad (۵)$$

که در آن توزیع P ،مقدار ξ_j را با احتمال p_j و توزیع P_0 مقدار ξ_i^0 را با احتمال p_i^0 کسب می‌کند. علت استفاده از متریک واسرشتن در پژوهش حاضر این است که این متریک فاصله بین دو توزیع احتمال را بر اساس فاصله مقادیر دو توزیع ، ضمن در نظر گرفتن احتمال ایجاد آن فاصله در نظر می‌گیرد و بنابراین نسبت به معیارهای دیگر مانند واگرایی کی ال جامع‌تر است. پس از معرفی متریک واسرشتن در ادامه به معرفی نسبت کالمار پرداخته می‌شود که برای محاسبه آن نیاز است تا حداکثر افت یا کاهش MMD محاسبه شود. حداکثر اُفت یا کاهش بدترین ضرر متوالی در یک دوره زمانی مشخص است. حداکثر اُفت از سبد سهام توسط رابطه (۶) اندازه‌گیری می‌شود که در آن $r(t,\tau)$ بازده در بازه زمانی بین t و τ است.

$$MDD = -\min_{\tau\in(0,T)}\big(\min_{t\in(0,\tau)} r(t,\tau)\big) \quad (۶)$$

حداکثر اُفت، بدترین عملکرد تحقق‌یافته از زمان آغاز به کار سبد سهام در طول یک افق سرمایه‌گذاری معین است. بنابراین دارایی‌هایی با کمترین میزان حداکثر افت بیشتر موردعلاقه سرمایه‌گذاران استند. علاوه بر این، حداکثر کاهش نیز اطلاعات مربوط به تکامل زمانی یک سری بازده را در مقابل سایر معیارهای ریسک مبتنی بر چندک رمزگذاری می‌کند. بنابراین توزیع بازده سبد سهام در محاسبه این مقدار توزیع بازده سبد نقش اساسی دارد. نسبت کالمار نسبت بازگشت به حداکثر کاهش است یعنی:

$$Calmar = \frac{R}{MDD} \quad (۷)$$

که در آن R میانگین بازده تحقق‌یافته است و MDD حداکثر کاهش تحقق‌یافته معادله در یک افق زمانی سرمایه‌گذاری معین است. سرمایه‌گذاران دارایی‌هایی با نسبت‌های کالمار بالاتر را به دارایی‌هایی با نسبت‌های کالمار پایین‌تر ترجیح می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود این نسبت به توزیع بازده حساس است. پس از بیان متریک واسرشتن و نسبت کالمار، مدل استوار توزیعی پژوهش باهدف بیشینه‌سازی نسبت کالمار به‌صورت یک برنامه‌ریزی بیشینه-کمینه مطابق رابطه ۸ تعریف می‌شود. این مدل که نوآوری اصلی پژوهش حاضر است، از نوع استوار توزیعی است زیرا نا اطمینانی مدل بر روی پارامتر توزیع بازده سبد سهام قرار دارد و برای پوشش این نا اطمینانی و استوارسازی مدل از رویکرد بدترین سناریو استفاده‌شده است که سناریوها، توزیع‌های موجود در یک همسایگی از توزیع تجربی استند.

$$\max_x \inf_{P\in D(w)} Calmar(x,r) = \frac{E(x^t r)}{MDD(x,r)}$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad (۸)$$
$$\forall i: x_i \geq 0$$

که در آن

$$D_w(P,P_0) = \{P \in P(\Omega) | W(P,P_0) < \theta\} \quad (۹)$$

در رابطه ۸، x بردار وزن سبد سهام، r بردار بازده دارایی‌ها، P_0 توزیع تجربی سبد سهام است که برحسب داده‌های تجربی استخراج‌شده از سری بازده سبد سهام محاسبه

می‌شود و پارامتر θ کنترل‌کننده شعاع همسایگی از توزیع تجربی است. $D_W(P,P_0)$ نیز شامل تمام اندازه‌هایی است که در همسایگی θ از توزیع تجربی (با توجه به متریک واسرشتن) قرار دارند (مقادیری که چنین تابع‌های توزیع احتمال می‌توانند بگیرند با توزیع تجربی یکسان است اما احتمال اخذ یک مقدار ممکن است با توزیع تجربی فرق کند). بنابراین مدل استوار توزیعی پژوهش یک مدل غیرخطی با یک محدودیت خطی است. برای بهینه‌سازی مدل ۸ از الگوریتم تجمعی ذرات استفاده است. این الگوریتم از توده‌ای از ذرات تشکیل‌شده است. هر ذره‌ای در ناحیه‌ای از فضای جستجو ساکن شده است. مقدار تابع هدف برای هر ذره میزان شایستگی یا برازندگی مکان آن ذره را نشان می‌دهد. ذرات در ناحیه جستجو با سرعت مشخصی حرکت می‌کنند. سرعت ذره (جهت و مقدار سرعت) تحت دو عامل قرار دارد. یکی بهترین تجربه‌ای که آن ذره تاکنون داشته است (بهترین مقدار برازندگی که تاکنون داشته است) و عامل دیگر بهترین تجربه‌ای که ذرات مجاور تاکنون داشته‌اند. و درنهایت حرکت ذرات به سمت نقطه بهینه همگرا خواهد شد. برای بهینه‌سازی مدل ۸ از ترکیب دو الگوریتم تجمعی ذرات استفاده می‌شود. الگوریتم الگوریتم تجمعی ذرات اول دارای تابع هدف بیشینه‌سازی است، یک نسل از جواب‌ها را تولید می‌کند که هر ذره، یک سبد سهام است و تابع هدف آن به شکل

$$f(x) = \min_{P\in D(w)} Kalmar(x,r) = \frac{E(x^t r)}{MDD(x,r)} \quad (۱۰)$$

است (Ji et al., 2022). در فرآیند محاسبه تابع هدف رابطه ۱۰ یک مدل کمینه‌سازی وجود دارد که برای کمینه‌سازی اخیر نیز از یک الگوریتم تجمعی ذرات استفاده می‌شود که متغیر تصمیم تابع اندازه است که در یک شعاع همسایگی از تابع توزیع تجربی قرار دارد. درنهایت پس از بهینه‌سازی سبد سهام، عملکرد آن بر روی‌داده‌های آزمون موردبررسی قرار می‌گیرد. بدین‌صورت فلوچارت مراحل پژوهش به‌صورت شکل **۱** است.

۴- یافته‌های پژوهش

در این بخش به‌صورت عملی به تشکیل سبد سهام استوار توزیعی در بورس اوراق بهادار تهران اقدام می‌شود. سبد سهام پژوهش از ۸ شاخص یا صنعت از بورس اوراق بهادار تهران از ابتدای ۱۳۸۹ تا انتهای ۱۴۰۰ تشکیل‌شده است. استفاده از شاخص به مفهوم تشکیل یک سبد سهام متنوع از سهام موجود در آن صنعت است. به‌عنوان نمونه استفاده از شاخص خودرو به‌عنوان یک دارایی به این معنی است که زیرمجموعه این شاخص به‌صورت متنوع (متناسب با وزن آن‌ها در شاخص) خریداری شود. افق زمانی سبد سهام یک‌هفته‌ای است (برای دوره یک هفته بسته می‌شود) و هر هفته ۵ روز کاری در نظر گرفته شده است. آمار توصیفی مربوط به ۵۹۴ بازده هفتگی دارایی‌ها در جدول **۱** ارائه‌شده است. ۵۹۴ بازده هفتگی پژوهش، به ۳۰۴ داده برای آموزش و بهینه‌سازی مدل‌های پژوهش و ۲۹۰ داده به‌منظور آزمون و بررسی عملکرد استواری و سودآوری مدل‌ها تقسیم گردید. مدل پژوهش از متریک واسرشتن به‌منظور مشخص‌سازی اندازه‌ها یا توزیع‌هایی که در شعاع مناسب از توزیع تجربی قرار دارند، استفاده می‌کند. برای تعیین شعاع گوی حول اندازه تجربی نیز داده‌های آموزشی به ۵ دسته تقسیم و شعاع گوی برابر یک‌دهم بیشترین فاصله واسرشتن ایجادشده بین ۵ دسته انتخاب گردید که این مقدار برابر ۰/۰۰۲ است.

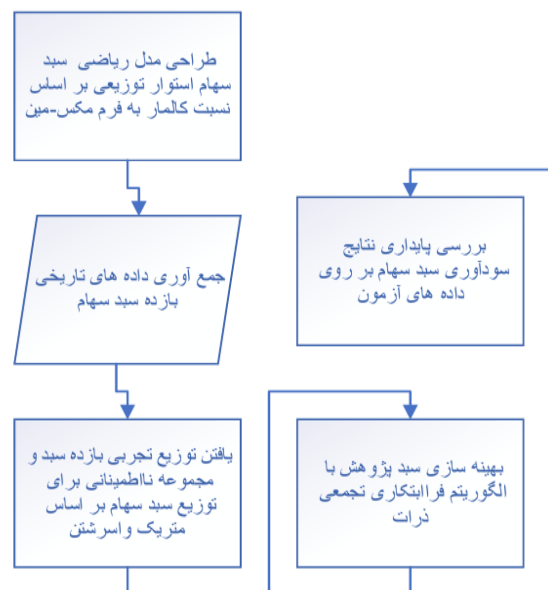
بر اساس روش تحقیق در بخش قبل، سبد سهام بهینه به کمک ترکیب دو الگوریتم تجمعی ذرات به‌منظور بهینه‌سازی مدل بیشینه-کمینه محاسبه گردید. به کمک الگوریتم تجمعی ذرات با ۱۰۰۰ تکرار و ۲۰۰ ذره، سبد بهینه استوار توزیعی با تابع هدف بیشینه‌سازی نسبت کالمار در مدل ۸، به‌صورت جدول **۲** محاسبه گردید. سپس عملکرد سبد بهینه بر روی هفته‌های تست (آزمون) جمع‌آوری گردید که عملکرد بازده هفتگی مدل استوار توزیعی بر روی هفته‌های تست در شکل **۲** ارائه‌شده است. داده‌های تست به ۵ دوره که طول هر دوره ۵۸ هفته است، تقسیم گردید و در هر دوره نسبت کالمار موردمحاسبه قرار گرفت که نتیجه در شکل **۳** ارائه‌شده است. برای بررسی عملکرد استواری مدل پژوهش در داده‌های تست از دو معیار استفاده می‌شود. برای محاسبه معیار اول دو کمیت موردمحاسبه قرار می‌گیرد. کمیت اول میانگین نسبت‌های کالمار حاصل‌شده در ۵ گروه داده تست (اندازه هر گروه ۵۸ هفته) است. کمیت دوم انحراف معیار نسبت‌های کالمار حاصل‌شده در ۵ گروه داده تست است که نشان‌دهنده میزان پراکندگی داده‌ها حول میانگین است.

جدول (۱): آمار توصیفی بازده هفتگی دارایی‌های سبد

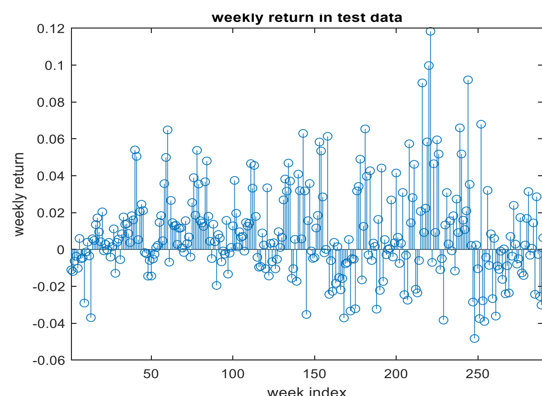
شاخص آماری دارایی	مقدار احتمال	آماره جارک برا	انحراف معیار	کمینه	بیشینه	میانه	میانگین
ک غیرفلزی	۰/۰۰۰	۳۰۱/۶۶۶	۰/۰۳۹	−۰/۱۵۰	۰/۱۵۰	۰/۰۰۱	۰/۰۰۷
ک فلزی	۰/۰۰۰	۷۷/۵۱۰	۰/۰۴۷	−۰/۱۳۶	۰/۱۵۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۹
سیمان	۰/۰۰۰	۷۷/۵۱۰	۰/۰۴۷	−۰/۱۳۶	۰/۱۵۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۹
دارو	۰/۰۰۰	۶۵۶/۲۴۸	۰/۰۳۶	−۰/۱۳۴	۰/۱۵۰	۰/۰۰۲	۰/۰۱۰
ف نفتی	۰/۰۰۰	۳۸/۵۲۳	۰/۰۵۴	−۰/۱۵۰	۰/۱۵۰	۰/۰۰۲	۰/۰۱۰
ماشین‌آلات	۰/۰۰۰	۲۰۶/۲۹۵	۰/۰۳۸	−۰/۱۵۰	۰/۱۵۰	۰/۰۰۳	۰/۰۰۹
قند	۰/۰۰۰	۵۹/۵۴۲	۰/۰۴۹	−۰/۱۱۲	۰/۱۵۰	۰/۰۰۳	۰/۰۱۱
خودرو	۰/۰۰۰	۲۴/۴۹۳	۰/۰۵۵	−۰/۱۵۰	۰/۱۵۰	۰/۰۰۱	۰/۰۰۸

جدول (۲): سبد بهینه استوار توزیعی

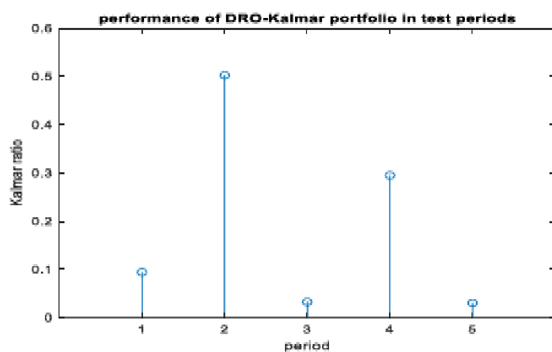
شماره دارایی	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
وزن	۰/۱۴۸۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۱۶۷۴	۰/۰۸۹۰	۰/۰۱۰۵	۰/۲۴۰۰	۰/۳۹۷۳



شکل (۱): فلوچارت روش تحقیق.



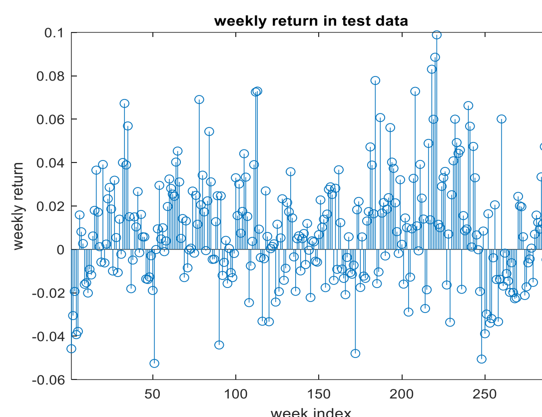
شکل (۲): بازده‌های هفتگی حاصل‌شده بر روی دوره تست.



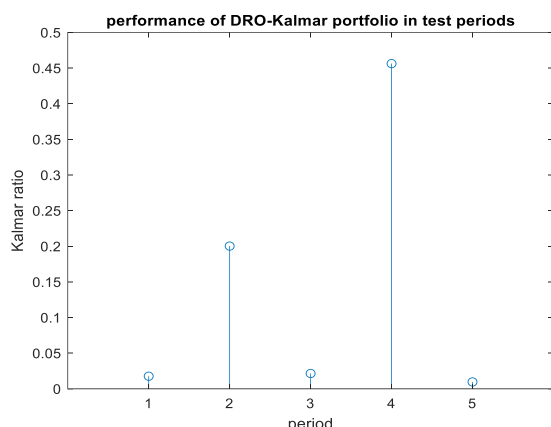
شکل (۳): نسبت کالمار در ۵ گروه ایجادشده در داده‌های تست.

در نظر گرفتن هم‌زمان دو معیار سودآوری و استواری نسبت کالمار را می‌توان در حاصل تقسیم دو کمیت اخیر جستجو کرد که معیار اول را تشکیل می‌دهد. مقدار بالاتر این نسبت نشان می‌دهد که نسبت کالمار بالاتر، ضمن تحمل ریسک کمتر حاصل‌شده است. معیار دوم مقدار کمترین نسبت کالمار حاصل‌شده در ۵ گروه داده تست است. عملکرد مدل استوار توزیعی با معیار فاصله واسرشتن در جدول **۳** ارائه‌شده است. پس از بررسی مدل استوار توزیعی برای نسبت کالمار، در ادامه مدل بیشینه‌سازی نسبت کالمار بدون خاصیت استوار توزیعی موردمحاسبه قرار گرفت. در این حالت تنها از یک توزیع و آن‌هم توزیع تجربی داده‌ها استفاده گردید. سبد بهینه در این مدل به الگوریتم تجمعی ذرات مطابق جدول **۴** محاسبه گردید. پس از بررسی مدل استوار توزیعی برای نسبت کالمار، در ادامه مدل

بیشینه‌سازی نسبت کالمار بدون خاصیت استوار توزیعی موردمحاسبه قرار گرفت. در این حالت تنها از یک توزیع و آن‌هم توزیع تجربی داده‌ها استفاده گردید. سبد بهینه در این مدل به الگوریتم تجمعی ذرات مطابق جدول **۴** محاسبه گردید. به‌مانند قبل، داده‌های تست به ۵ دوره که طول هر دوره ۵۴ هفته است، تقسیم گردید و در هر دوره نسبت کالمار موردمحاسبه قرار گرفت که نتیجه در شکل **۴** ارائه است. سپس در هر دوره نسبت کالمار موردمحاسبه قرار گرفت که نتیجه در شکل **۵** ارائه است.



شکل (۴): بازده‌های هفتگی حاصل‌شده بر روی دوره تست.



شکل (۵): نسبت کالمار در ۵ گروه ایجادشده در داده‌های تست.

درنهایت عملکرد مدل فاقد خاصیت استوار توزیعی با بیشینه‌سازی نسبت کالمار در جدول **۵** ارائه‌شده است. مقایسه جدول عملکرد مدل استوار توزیعی در جدول **۳** با مدل فاقد این خاصیت در جدول **۵** نشان می‌دهد که سبد استوار توزیعی، تقسیم میانگین به انحراف معیار نسبت کالمار در ۵ دوره را به میزان ۱/۲۷ بهبود می‌دهد و بعلاوه کمینه نسبت کالمار در ۵ دوره در سبد استوار توزیعی نسبت به سبد فاقد این خاصیت بیشتر است.

جدول (۳): عملکرد مدل پژوهش

مقدار	معیار عملکرد
۰/۱۹۰۶	میانگین نسبت‌های کالمار در ۵ دوره تست
۰/۲۰۵۱	انحراف معیار نسبت‌های کالمار در ۵ دوره
۰/۹۲۹۳	تقسیم میانگین به انحراف معیار نسبت کالمار در ۵ دوره
۰/۰۳۰۳	کمترین نسبت کالمار در ۵ دوره تست

جدول(۴): سبد بهینه فاقد خاصیت استوار توزیعی

شماره دارایی	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
وزن	۰/۱۳۴۰	۰/۱۷۲۵	۰/۱۲۹۷	۰/۲۱۵۶	۰/۰۲۰۶	۰/۱۳۰۷	۰/۰۹۰۹	۰/۱۸۴۴

جدول (۵): عملکرد سبد بدون خاصیت استوار توزیعی

مقدار	معیار عملکرد
۰/۱۴۱۱	میانگین نسبت‌های کالمار در ۵ دوره تست
۰/۱۹۳۴	انحراف معیار نسبت‌های کالمار در ۵ دوره
۰/۷۲۹۲	تقسیم میانگین به انحراف معیار نسبت کالمار در ۵ دوره
۰/۰۰۹۶	کمترین نسبت کالمار در ۵ دوره تست

۵- نتیجه‌گیری

پژوهش حاضر به معرفی یک سبد سهام جدید بر پایه بهینه‌سازی استوار توزیعی پرداخت. به‌طورکلی هر مدل سبد سهام دارای مفروضات خاص خود است و ازاین‌رو برای گروهی از سرمایه‌گذاران مناسب است. به‌عنوان نمونه سبد سهام چند دوره‌ای برای سرمایه‌گذارانی مناسب است که دارای دیدگاه چند دوره‌ای نسبت به بازار هستند و تمایل دارند سبد سهام خود را در دوره‌های زمانی منظم به‌روزرسانی کنند. سبد معرفی‌شده در پژوهش حاضر مناسب سرمایه‌گذاران ریسک‌گریزی است که تمایل به سنجش سودآوری بر اساس نسبت پاداش-ریسک کالمار دارند. این‌گونه نسبت‌ها هم‌زمان بازده و ریسک را در محاسبه سودآوری لحاظ می‌کنند و بنابراین معیاری برای ریسک به‌اندازه هستند. سرمایه‌گذاران ریسک‌گریز، گروهی از سرمایه‌گذاران هستند که تمایل دارند به‌اندازه ریسکی که متحمل می‌شوند از عایدی متناسب با آن برخوردار شوند. ازاین‌رو به سرمایه‌گذاران ریسک‌گریز توصیه می‌شود تا مدل پژوهش حاضر را در سبد نمونه‌ای خود مورد ارزیابی سودآوری قرار دهند و با تأیید عملکرد آن در داده‌های آزمون نسبت به استفاده عملی از آن اقدام کنند.

مدل معرفی‌شده در پژوهش حاضر برای سرمایه‌گذارانی مناسب است که تمایل به پایداری نتایج حاصل از بهینه‌سازی مدل‌های ریاضی دارند. مدل‌های بهینه‌سازی سبد سهام نتایجی را برای آینده سبد محتمل می‌دانند. کیفیت نتایج مورد انتظار موردتردید است زیرا پارامترهای سبد سهام غالباً با رویکردهای آماری محاسبه می‌شود. استوار سازی سبد سهام در جهت کاهش این عدم قطعیت است. بدین‌صورت انتظار می‌رود تا تغییرپذیری نتایج حول مقادیر مورد انتظار کاهش یابد. نتایج آزمون عملکرد سبد پژوهش در داده‌های برون نمونه‌ای نشان می‌دهد که عملکرد حاصله دارای پایداری و استواری بیشتری نسبت به سبد فاقد ویژگی استواری توزیعی است.

با توجه به نتایج حاصل‌شده، به علاقه‌مندان به مدل‌سازی مالی در انتخاب سبد سهام پیشنهاد می‌شود تا با ارزیابی مناسب مدل‌های سبد سهام استوار توزیعی از مزایای پایداری و استواری این مدل‌ها بهره ببرند. به‌خصوص با توجه به پویایی توزیع بازده دارایی‌ها در بازارهای مالی به سرمایه‌گذاران ریسک گریز که تمایل به ریسک به‌اندازه دارند، پیشنهاد می‌شود تا رویکرد استوار توزیعی را در مورد نسبت‌های پاداش-ریسک مدنظر قرار دهند و با تست سودآوری سبد بهینه‌شده بر روی‌داده‌های آزمون اقدام به اتخاذ موقعیت معاملاتی کنند.

ازلحاظ مدل و رویکرد، نزدیک‌ترین پژوهش در پیشینه تحقیقات انجام‌شده، مربوط به پژوهش جی و همکاران (Ji et al., 2022) است که مسئله بهینه‌سازی استوار توزیعی سبد سهام با نسبت بازده تعدیل‌شده با دم پایدار خطی شده را مطالعه کردند که در آن هدف، به حداکثر رساندن معیار عملکرد نسبت مذکور در بدترین حالت تحت ابهام واسرشتن مبتنی بر داده است. پژوهش مذکور هرچند از لحاظ تابع هدف و نحوه بهینه‌سازی با پژوهش حاضر متفاوت است اما نشان می‌دهد که استوارسازی توزیعی نسبت مذکور می‌تواند پایداری عملکرد را در داده‌های برون‌نمونه‌ای افزایش دهد که با پژوهش حاضر هم‌جهت است.

۵-۱- پیشنهادات

۱) به محققین آتی پیشنهاد می‌شود تا از سایر متریک‌هایی که برای اندازه‌گیری فاصله دو اندازه احتمال وجود دارد مانند متریک مجموع تغییرات یا متریک هلینگر به‌منظور استوارسازی توزیعی در انتخاب سبد سهام استفاده کنند و نتایج را مقایسه کنند.

۲) به محققین آتی پیشنهاد می‌شود تا به‌جای توزیع تجربی به‌عنوان مرکز گوی در استوارسازی توزیعی از توزیع‌های پارامتریک مانند نرمال و یا لوگ نرمال نیز استفاده کنند و نتایج را با توزیع تجربی مقایسه کنند.

۳) به محققین آتی پیشنهاد می‌شود تا علاوه بر شعاع همسایگی کروی، شعاع همسایگی جعبه‌ای و بیضوی را نیز

۴) در بهینه‌سازی استوار به‌کار گرفته و نتایج را مقایسه کنند.

۵-۲- محدودیت‌های تحقیق

عملکرد سبد سهام، وابسته به دارایی‌های تشکیل‌دهنده آن است. ازاین‌رو در تعمیم نتایج حاصل از پژوهش حاضر به

یک سبد سهام با محتوایی غیر از دارایی‌های موجود در سبد پژوهش حاضر، باید ضمن بهینه‌سازی سبد سهام به ارزیابی عملکرد سودآوری آن در داده‌های خارج از نمونه اقدام کرد.

۶- منابع

Bermin, H. P., & Holm, M. (2023). Kelly trading and market equilibrium. *International Journal of Theoretical and Applied Finance, 26*(01), 2350001. **DOI:** https://doi.org/10.1142/S0219024923500012

Du, N., Liu, Y., & Liu, Y. (2020). A new data-driven distributionally robust portfolio optimization method based on Wasserstein ambiguity set. *IEEE Access, 9*, 3174-3194. **DOI:** https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3047967

Hamidieh, A., Kaviani, M., & Akhgari, B. A. (2023). Robust portfolio optimization under interval-valued conditional value-at-risk (CVaR) criterion in the Tehran Stock Exchange. *Financial Research Journal, 25*(3), 508-528. **DOI:** https://doi.org/10.1186/s13663-023-00453-2

Heydari, M. S., Walidi, Ebrahimi, & Saidbabak. (2021). Stock portfolio optimization based on robust probabilistic programming model using genetic algorithms and mixed frog jump. *Financial Engineering and Securities Management, 47*(12), 564-586. **DOR:** https://dorl.net/dor/20.1001.1.22519165.1400.12.47.26.4

Hosseini-Nodeh, Z., Khanjani-Shiraz, R., & Pardalos, P. M. (2022). Distributionally robust portfolio optimization with second-order stochastic dominance based on Wasserstein metric. *Information Sciences*. **DOI:** https://doi.org/10.1016/j.ins.2022.09.039

Ji, R., Lejeune, M. A., & Fan, Z. (2022). Distributionally robust portfolio optimization with linearized STARR performance measure. *Quantitative Finance*, 1-15. **DOI:** https://doi.org/10.1080/14697688.2021.1993623

Kobayashi, K., Takano, Y., & Nakata, K. (2021). Cardinality-constrained distributionally robust portfolio optimization. *arXiv preprint arXiv:2112.12454*. **DOI:** https://doi.org/10.48550/arXiv.2112.12454

Khandan, A. (2023). Comparing the performance of median or mean and other risk indicators in portfolio optimization. *Quarterly Journal of Quantitative Economics, 20*(1), 99-138. **DOI:** https://doi.org/10.22055/jqe.2021.36778.2349

Li, J. Y. M. (2023). Wasserstein-Kelly portfolios: A robust data-driven solution to optimize portfolio growth. *arXiv preprint arXiv:2302.13979*. **DOI:** https://doi.org/10.48550/arXiv.2302.13979

Shirkavand, S., & Fadaei, H. (2022). Robust portfolio optimization by applying multi-objective and Omega conditional value at risk models based on the mini-max regret criterion. *Financial Research Journal, 24*(1), 1-17. **DOI:** https://doi.org/10.22059/frj.2021.287379.1006913

Zhang, X. (2022). Distributional robust portfolio construction based on investor aversion. *arXiv preprint arXiv:2203.13999*. **DOI:** https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.13999